2)a) $\forall x \in]1;+\infty[; \forall t \in [x;x^2]$

$$x \le t \le x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{t} \le 1 \le \frac{x^2}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{tLogt} \le \frac{1}{Logt} \le \frac{x^2}{tLogt}. \quad \text{car } Logt > 0$$

b) $\forall x \in]1;+\infty[; \forall t \in [x;x^2]$ on a : $\frac{x}{tLogt} \le \frac{1}{Logt} \le \frac{x^2}{tLogt}$

$$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \int_x^{x^2} \frac{x}{tLogt}dt \le \int_x^{x^2} \frac{1}{Logt}dt \le \int_x^{x^2} \frac{x^2}{tLogt}dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; x\int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{Logt}dt \le F(x) \le x^2\int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{Logt}dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]1;+\infty[; x[Log(Logt)]_x^{x^2} \le F(x) \le x^2[Log(Logt)]_x^{x^2}$$

.....

$$[Log(Logt)]_x^{x^2} = Log(Logx^2) - Log(Logx)$$

$$= Log(2Logx) - Log(Logx) = Log\left(\frac{2Logx}{Logx}\right) = Log2$$

.....

Ainsi : $\forall x \in]1;+\infty[; xLog2 \le F(x) \le x^2Log2.$

c) $\begin{cases} \forall x \in]1;+\infty[; xLog2 \le F(x) \le x^2Log2. \\ \lim\limits_{x\to 1^+} [xLog2] = \lim\limits_{x\to 1^+} [x^2Log2] = Log2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = Log2 = F(1) \Rightarrow$ F est continue en 1.

3)a) Soit H une primitive sur $]1,+\infty[$ de la fonction qui à $t \mapsto \frac{1}{Logt}$

D'ou $\forall x \in]1,+\infty[, F(x) = H(x^2) - H(x)$.

$\oplus$ la fonction qui a $x \mapsto x^2$ est derivable sur $]1,+\infty[$ et à valeur dans $]1,+\infty[$ de plus H est dérivable sur $]1,+\infty[$

D'où la fonction qui a $x \mapsto H(x^2)$ est derivable sur $]1,+\infty[$.

Par suite F est dérivable sur $]1,+\infty[$.

$\boxplus \forall x \in]1,+\infty[, F'(x) = 2x\,H'(x^2) - H'(x) = 2x\frac{1}{Logx^2} - \frac{1}{Logx}$

$$= \frac{2x}{2Logx} - \frac{1}{Logx} = \frac{x-1}{Logx} = f(x).$$

b) Soit $x \in]1,+\infty[$.

$\begin{cases} F \text{ est continue sur } [1;x] \\ F \text{ est dérivable sur }]1;x[\end{cases}$

$\overset{th}{\Rightarrow} \exists c \in]1,x[$ tel que $F(x) - F(1) = (x-1)F'(c)$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} F'(c)$ d'après la question précédente

Or $c \in]1,x[$ donc quand $x \to 1^+$ alors $c \to 1^+$